Journées nationales de l'APMEP, Laon, octobre 2015

Le produit scalaire quelle histoire ? !

Anne Boyé, IREM des Pays de la Loire,

Centre François Viète d'épistémologie, histoire des sciences et des techniques

Pourquoi ont-ils inventé les vecteurs ?

Le produit scalaire qu’est-ce que çà calcule au juste ?

Première rencontre avec une opération binaire externe.

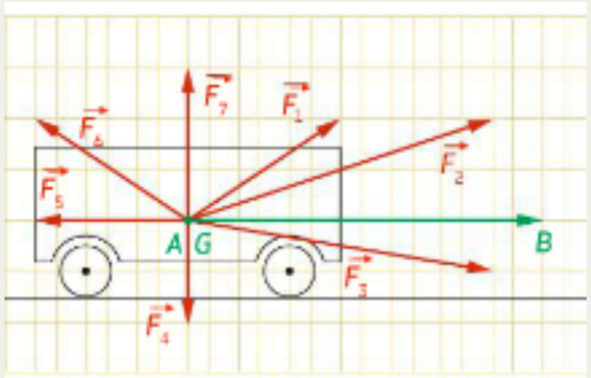
- Pourquoi enseigner les vecteurs ?
- Quelles sont les problématiques initiales auxquelles répond la construction du concept ?
- Quelles sont les problématiques actuelles qui peuvent donner sens à notre enseignement (pas forcément historiques) ?
- Quels vecteurs ?
- Le produit scalaire, pourquoi, comment ?

Comment introduit-on le produit scalaire dans les manuels ?

Examens de quelques manuels de 1°STI2D/STL et de 1°S

1° STI2D/STL, Hachette 2011

Activités 1 : travail d'une force de traction



Définition du produit scalaire par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

Si les deux vecteurs sont non nuls.

et

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Si l'un au moins des vecteurs est nul.

1° STI2D/STL, Delagrave 2015

Activités d'approche :

1 – le travail d'une force en physique

Partie A. Modélisation mathématique

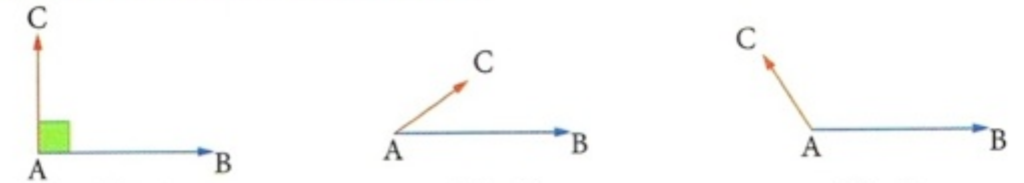
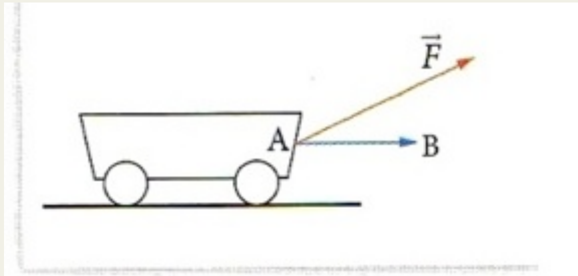


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

La force $\vec{F}$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et le déplacement par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Préciser pour chacune des figures ci-dessus si le travail est moteur, nul ou résistant.



Ceci est suivi de conjectures à l'aide de geogebra.

2 – le travail de la résultante de deux forces

Définition : exactement comme précédemment

1°S Déclic hachette 2011

Des maths partout !

L'eau en mouvement est utilisée dans les centrales hydrauliques pour produire de l'énergie électrique.

En physique, le produit scalaire de deux vecteurs est employé pour calculer le travail ou l'énergie produit par une force s'appliquant sur un corps en mouvement.

Au fil du temps

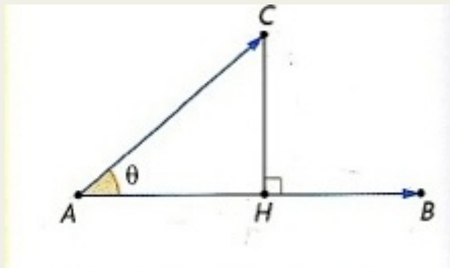
Le concept de *produit linéaire* de deux vecteurs est né de la physique. Il sert à calculer le travail ou l'énergie produit par une force qui s'applique sur un corps en mouvement.
Le mathématicien allemand Hermann Günther Grassmann (1809-1877) et le physico-chimiste américain Willard Gibbs (1839-1903) le notent par un point ou une croix.
Il fut baptisé *produit scalaire* par William Hamilton en 1853.
Les mathématiciens italiens Roberto Marcolongo (1862-1943) et Cesare Burali-Forti (1861-1931) le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de *produit intérieur* ou produit scalaire.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877).

Définition : on donne celle déjà énoncée précédemment et celle avec la projection orthogonale :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AH$ si $\cos\widehat{BAC} > 0$

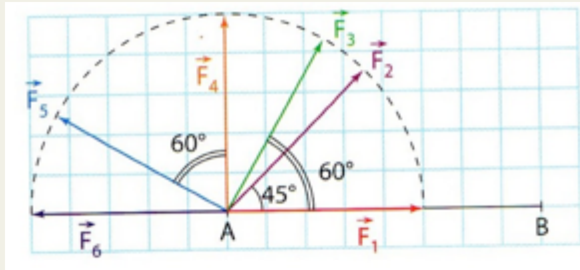
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AH$ si $\cos\widehat{BAC} < 0$



1°S Hyperbole 2011

Activité d'introduction par le travail d'une force en physique

On demande d'abord si, dans chacun des cas présenté, la force favorise ou s'oppose au mouvement de A vers B.



On définit ensuite le travail W d'une force constante $\vec{F}$ en physique, pour un déplacement rectiligne de A en B, comme le produit $F \times AB \times \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{F})$ où *F* est en N, *AB* en m et W en J

Nous sommes surpris-e-s de la définition qui est alors donnée, sans rapport avec l'activité.

DÉFINITION Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

Nous retrouvons dans un exercice sur une luge tirée par un enfant la liaison entre produit scalaire et travail d'une force.

1°S transmath 2011

En page d'accueil du chapitre, plusieurs appels à l'histoire

Une petite biographie de H. Grassmann, et citation de sa thèse sur la théorie des marées,(tout à fait appropriée au sujet) mais aussi la triangulation de la France par Delambre, qui peut faire croire que, d'une part, à son époque (fin du 18°s), on connaissait les vecteurs, et que d'autre part la formule de triangulation nécessitait la connaissance du produit scalaire.

Activité d'approche : calcul de AC^2- AB^2- BC^2 dans le cas d'un triangle rectangle ou de triangles qui ne le sont pas avec plusieurs cas de figure.

Ce qui mène à la définition :

Conclusion

- Le nombre $\frac{\delta}{2}$, égal à $\frac{1}{2}\left[AC^2 - AB^2 - BC^2\right] = AB \times BC \times \cos\theta$, est indépendant du cas de figure envisagé. Il est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, et se note $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Passons au cas général en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$. AB est la longueur de $\vec{u}$, que l'on note $\|\vec{u}\|$ (on lit « norme de $\vec{u}$ »).

De même, $BC = \|\vec{v}\|$ et $AC = \|\vec{u} + \vec{v}\|$. On peut alors définir le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

1°S, Hachette, Barbazo, 2015

Trois situations en introduction :
A) En sciences physiques, le travail d'une force
B) En géographie, mesure des altitudes (avec des lignes de niveau)
C) En mathématiques, généralisation du théorème de Pythagore.

Définition du produit scalaire

Définitions

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- **La norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $||\vec{u}||$, est le nombre réel positif défini par $||\vec{u}|| = AB$.
- **Le produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

1°S Déclic, Hachette 2015

On retrouve la page d'introduction et le définition de l'édition 2011. sans grand changement.

- « Implicitement la mécanique était porteuse, depuis Galilée, du concept de vecteur ; il restait à l'expliciter, un exemple de plus d'une notion mathématique directement dérivée de la réalité concrète. »

Bulletin de l'Union des physiciens, novembre 1975.

« La composition des forces et la composition des vitesses, bien connues en mécanique dès la fin du 17° siècle, n'exercèrent aucune répercussion sur l'Algèbre, bien qu'elles renfermassent déjà en germe le calcul vectoriel. Il faut attendre en effet le mouvement d'idée qui, aux environs de 1800, conduit à la représentation géométrique des nombres complexes, pour voir utiliser en mathématiques pures l'addition des vecteurs. Cette opération est d'ailleurs introduite sans aucune référence à la mécanique ; le lien entre les deux théories n'est explicitement reconnu que par les fondateurs du calcul vectoriel, dans le deuxième tiers du 19° siècle. »

Éléments d'histoire des mathématiques, Bourbaki, 1974

Trois grandes origines pour le concept de vecteur

Le « calcul géométrique » de Leibniz

La représentation géométrique des nombres complexes

Calcul portant diversement sur les objets géométriques

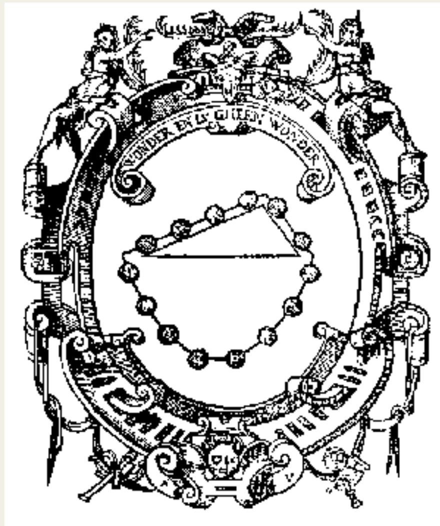
L'idée du parallélogramme des forces ou des vitesses

Signification physique, mécanique, du calcul vectoriel. Le vecteur étant une façon de représenter des concepts mécaniques, les forces et les vitesses.

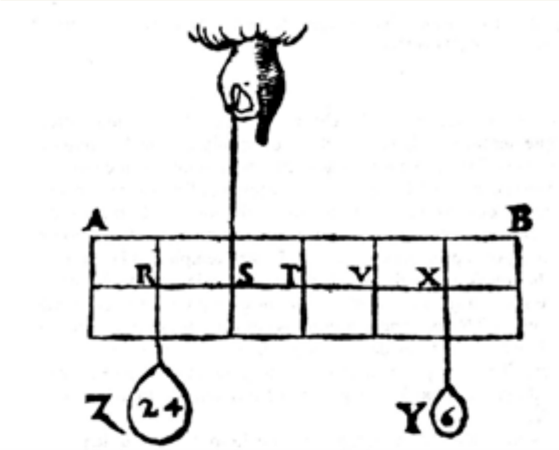
Simon Stevin (1548-1620). *L'art pondéraire, ou de la statique*

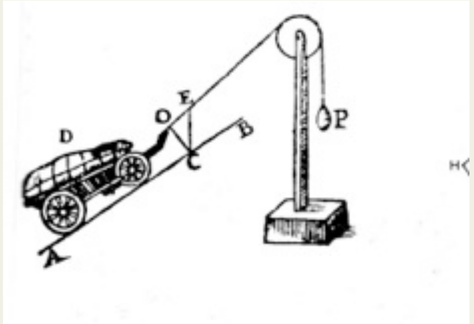
(édition française 1634) ; « le triangle des « pesanteurs »,

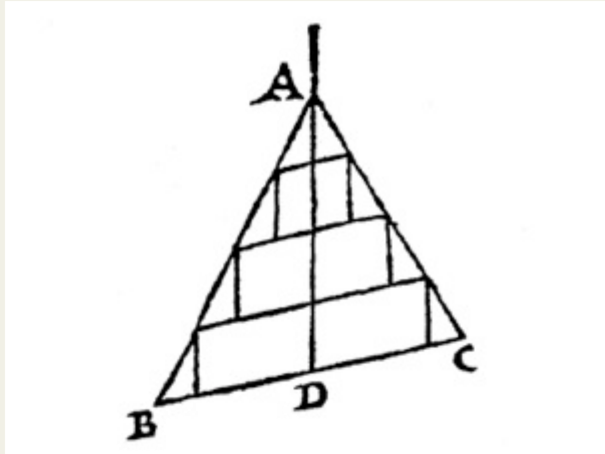
« forces ? »



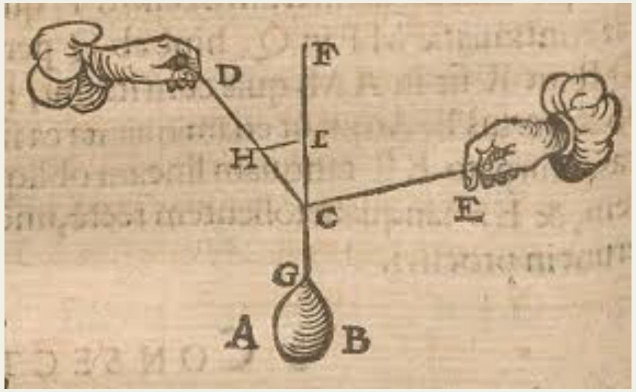
Merveille n'est pas mystère







Ne pas voir des vecteurs là où il n’y en a pas !



En haut les images originales du texte de Stevin
En bas, une interprétation moderne. (Dans un ouvrage au demeurant passionnant)

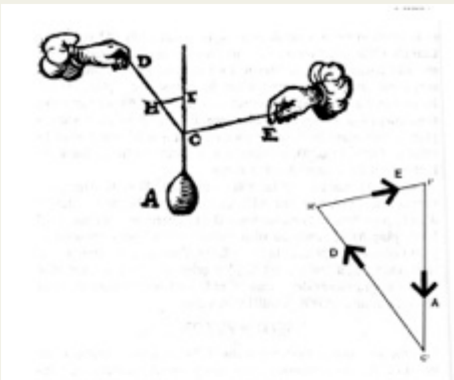


Fig. 3.11. L'application ingénieuse du triangle des forces HIC due à Stevin et sa version moderne plus pratique.

Extraits de « *Petite logique des forces*, Le Seuil, 1983

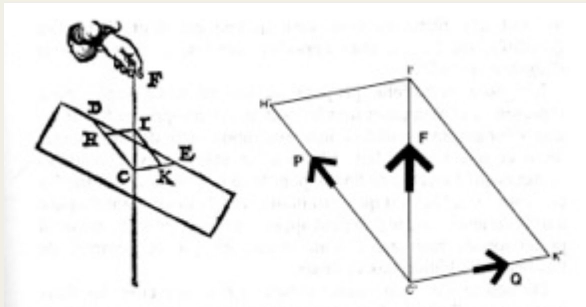
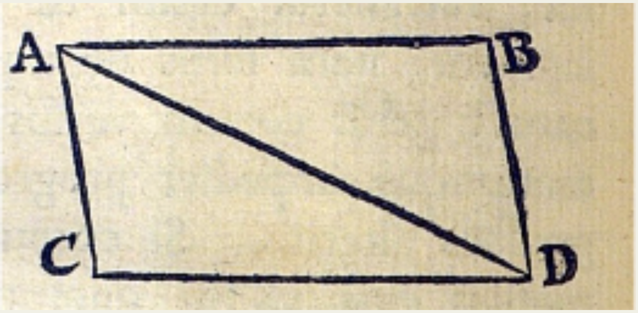
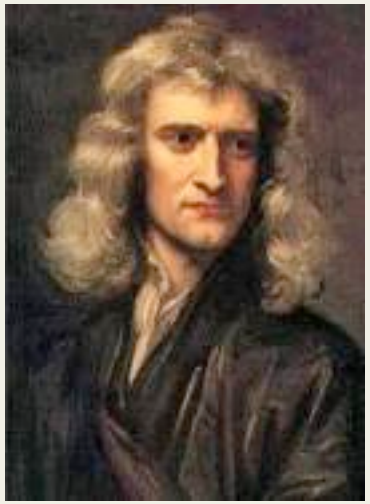


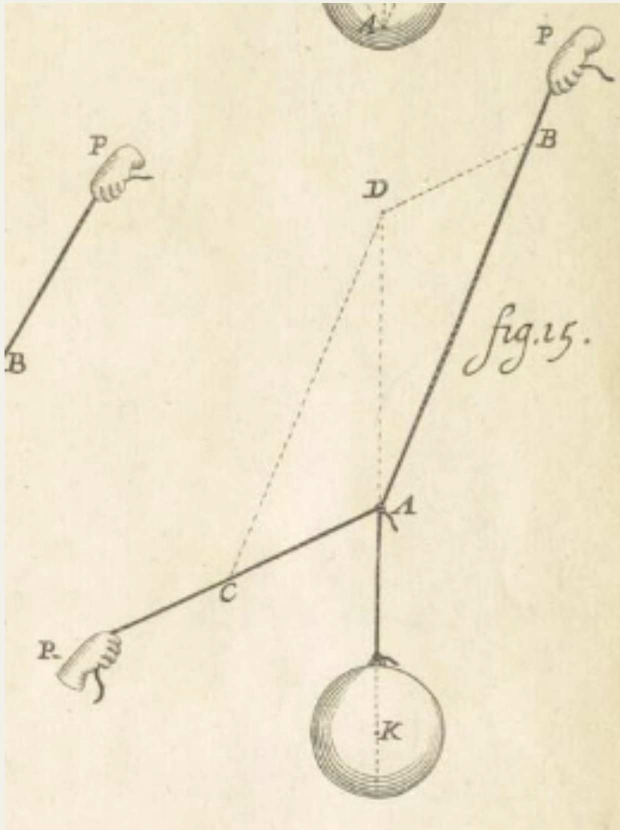
Fig. 3.15. Les composantes d'une force. Deux tractions, suivant les directions CD et CE, remplacent complètement la traction verticale F. La loi du parallélogramme donne leurs grandeurs.

Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687





1642-1727



Il y a le concept de force, et la composition des forces, mais toujours pas de vecteur.

Leibniz (1646-1716)

- Lettre à Huygens du 8 septembre 1679
  - *Je ne suis pas satisfait de l'algèbre car elle ne fournit ni les méthodes les plus rapides, ni les plus belles constructions géométriques. C'est pourquoi, je crois que, en ce qui concerne tout au moins la géométrie, nous avons besoin d'une analyse différente qui soit essentiellement géométrique ou linéaire et qui soit capable d'exprimer directement les « situs ».Je crois avoir mis au point une telle méthode qui permet de représenter les figures, et même les machines et les mouvements par des signes, de même que l'algèbre représente les nombres et les positions par des signes.*

« J’ai découvert certains éléments d’une nouvelle théorie, qui est différente de l’algèbre et dont l’un des principaux avantages est de représenter pour l’esprit, d’une façon exacte et réelle, même sans figure, tout ce qui dépende de la perception des sens. »

- Mais Leibniz ne définit aucune opération, et pour lui : AB γ BA. Sa géométrie est donc loin d’un système vectoriel où justement le sens de A vers B va avoir un rôle essentiel.
- Mais il est un des premiers à avoir poser le problème de faire une sorte d’algèbre sur les figures elles-mêmes, indépendante des nombres.
-
- La publication de son *Essai sur la géométrie de situation* en 1833 va donner l’occasion à H. Grassmann de faire connaître ses propres travaux.

La représentation géométrique des nombres imaginaires

Caspard Wessel 1799,

Jean-Robert Argand 1806

John Warren 1828,

C. V. Mourey 1828, …

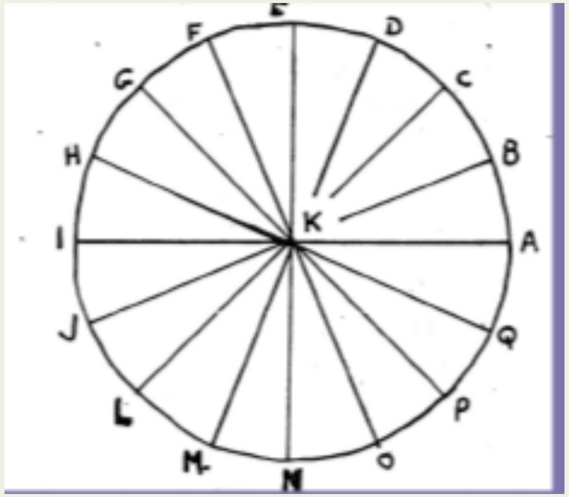
Le problème :

- Depuis Cardan et Bombelli (1545 ; 1572) on utilise les imaginaires sans pouvoir leur donner de sens. Ce ne sont pas des « nombres » puisqu'ils ne peuvent mesurer aucune grandeur matérielle.
- A la fin du 18° siècle et au début du 19°siècle, la question est donc de trouver une représentation géométrique de ces quantités, ce qui est la seule façon, alors, de leur donner une certaine réalité tangible.
- L'idée d'introduire une « direction » en géométrie est fortement présente.

- Les quantités négatives
- L’idée de la perpendicularité (Wallis1685)
- La géométrie de position de Carnot

Jean Robert Argand

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Argand, 1806



Argand associe ainsi une ligne dirigée à toute quantité imaginaire

"En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KF}$, ... , et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires

C. V. Mourey, 1828

« Avec un nouveau système d'algèbre que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences ; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une algèbre émanée de la géométrie ; c'est une géométrie généralisée et rendue algébrique. »

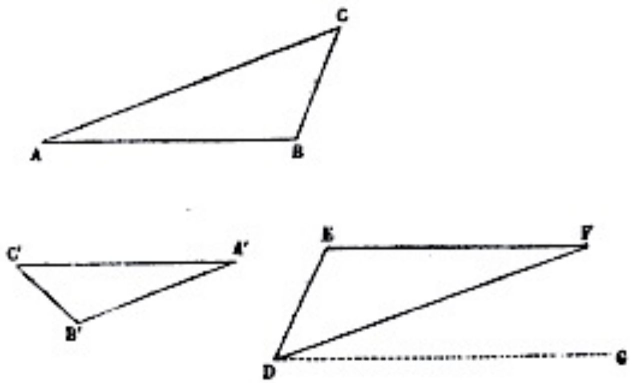
2. Si un voyageur, ou un mobile quelconque, partant du point A, va d'abord au point B (*fig.* 1, 2, 3 et 4),

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



et que du point B il aille ensuite en C, il sera aussi avancé que s'il fût allé directement de A en C, ni plus ni moins; donc,

voyage de A en B + voyage de B en C est équivalent à voyage de A en C;

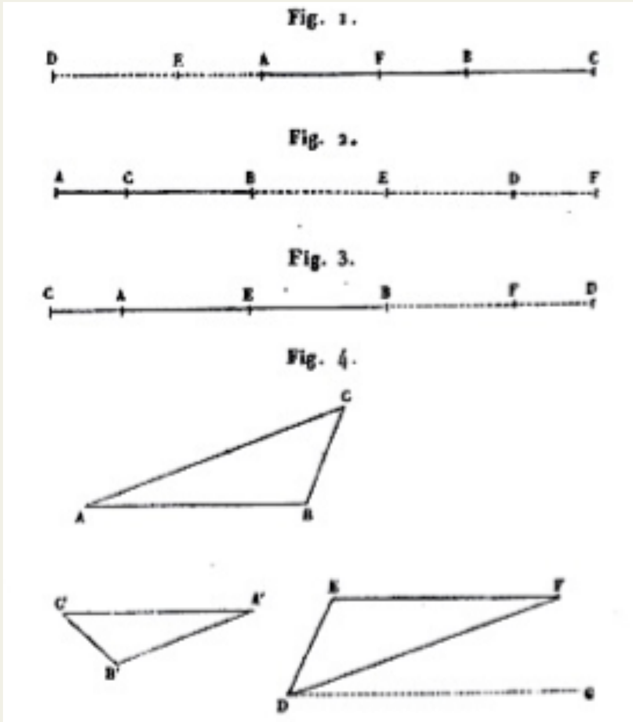
ou, pour abréger,

$$AB + BC = AC.$$

« L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin, considéré comme conduisant en un seul sens. Sur toute ligne on peut concevoir deux chemins conduisant en sens opposés, l'un de A en B par exemple, et l'autre de B en A. Pour que deux chemins soient égaux, en tant que chemins, il ne suffit pas qu'ils aient même longueur, il faut aussi qu'ils aient même direction. De sorte que tous les rayons d'un même cercle, considérés comme conduisant du centre à la circonférence, sont des chemins inégaux. L'expression algébrique (ou même arithmétique) d'un chemin en déterminera la direction, relativement à un autre chemin pris pour terme de comparaison. »

- « DÉVELOPPEMENT
- 4. Nous appellerons ligne directive ou chemin, la ligne considérée comme représentant un voyage, c'est-à-dire comme conduisant dans un seul sens. Il est bon de concevoir le chemin comme fluant, et indiquant par son flux le sens dans lequel il conduit.
- Pour désigner un chemin qui conduit de A à B, nous dirons simplement AB ; et pour désigner celui qui conduit de B en A, nous dirons BA. Ces deux notations AB, BA indiquent donc deux chemins différents, ou deux lignes directives différentes, quoiqu'elles n'expriment qu'une même ligne non directive. »

- L'équation AB + BC = AC sera notre principe fondamental.
- Il ne faut pas s'amuser à discuter sur la rigueur de ce principe ; pour tirer au court, il faut le regarder comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention, si elle est utile : or, elle est de la plus grande utilité, puisqu'elle seul peut nous fournir le moyen de suppléer, en Algèbre, à la soustraction.
- Donc, La somme de deux chemins de suite est le chemin simple qui conduit de l'origine du premier au terme du second ; plus simplement, c'est le chemin qui a même origine que le premier, et même terme que le second.



- Ces représentations géométriques mettent en avant l'idée de « lignes dirigées », « chemins », donc de direction, dans le plan. Nous avons en quelque sorte la représentation des « nombres complexes » en module et argument.

(addition, mais surtout multiplication)

- Cette représentation associe à toute quantité imaginaire un point du plan (et réciproquement).

- (*Il reste une certaine ambiguïté entre lignes dirigées (entité géométrique ?) et nombres dirigés (nombres ?)*
- *L'idée de presque tous ces auteurs est maintenant de trouver un moyen d'étendre leur calcul à l'espace.*

Deux « axes » de recherche, d'une certaine façon

« géométrique »

↓

(Leibniz)(Carnot)

↓

Bellavitis, Moebius, De Saint Venant

↓

Grassmann

« Algébrique »

↓

Hamilton

William Rowan Hamilton (1805-1865)

5)


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan
in a flash of genius discovered
fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
on a stone of this bridge

- *Théorie des fonctions conjuguées ou des couples algébriques* - 1837.
- Trouver une signification interne aux quantités imaginaires, qui ne passe pas par la géométrie.
- Il conçoit les couples de nombres réels

- Et du coup il cherche à construire une extension à des triplets.

- Il fait l'inventaire des propriétés que doivent vérifier les triplets :
- Associativité(il est l'inventeur du mot) et commutativité de l'addition et de la multiplication
- Distributivité de la multiplication sur l'addition, existence d'un quotient
- Une « loi de module ». (le module d'un produit égal le produit des modules)
- Une interprétation dans l'espace à trois dimension.(abandon d'une partie de son idée initiale)

- Recherches vaines
- Il tient finalement, en 1843, la solution avec les quadruplets de nombres réels qu'il nomme quaternions.
- Un quaternion est de la forme :

$w + x\,i + y\,j + z\,k$, où x, y , z et w sont des réels et i, j, k peuvent être considérés comme les unités directives de trois axes d'un repère orthonormé (direct), tels que :

$i^2 = -1 = j^2 = k^2 = ijk$

Alors : $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$,

mais $ji = -k$; $kj = -i$; $ik = -j$

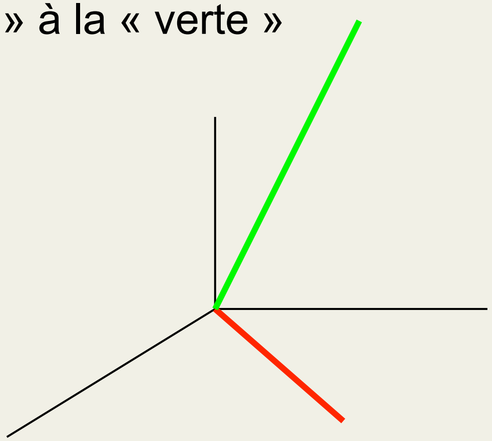
Il a fallu abandonner la commutativité du produit !

Lettre de Hamilton à l'un de ses fils

- *Le 6 octobre, qui se trouvait être un lundi, et jour de conseil de l'Académie Royale d'Irlande, je cheminais pour aller y assister, et ta mère cheminait avec moi le long du canal royal ; et pendant qu'elle me parlait de tout et de rien, mon esprit était pris par une idée rampante, qui finalement donna un résultat, dont il n'est pas exagéré de dire que j'en sentis immédiatement l'importance. Un circuit électrique semblait se former, et un éclair jaillit, le messager (et j'en eu la vision immédiate) de nombreuses et longues années à venir d'un travail et de réflexion dans une direction toute tracée. Aussi, ne pus-je résister à l'impulsion, aussi peu philosophique qu'elle fut, de graver avec un couteau sur une pierre du pont de Brougham, comme nous l'atteignions, la formule fondamentale avec les symboles i, j, k :* $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$*, qui contient la solution du problème.*

Essai d’explication élémentaire.

- Par quel « opérateur » peut-on passer dans l’espace d’un « segment orienté » à un autre ?
- Il faut multiplier d’abord la longueur du premier par un nombre pour obtenir la longueur du deuxième. Il faut ensuite effectuer une rotation pour passer de la direction « rouge » à la « verte »



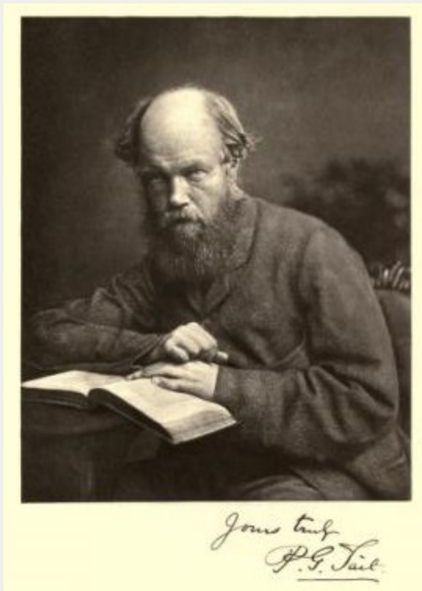
Pour cela il faut trois éléments numériques qui sont les deux angles déterminant le plan dans lequel s’effectue la rotation, et l’angle déterminant la valeur même de l’angle de la rotation.

Ce multiplicateur nécessite donc 4 nombres, d’où son nom de quaternion.

(n’oublions pas que Hamilton est aussi un astronome).

- 1843 : « découverte » des quaternions
- 1853 : Lectures on quaternions
- 1866 : publication de Elements of quaternions

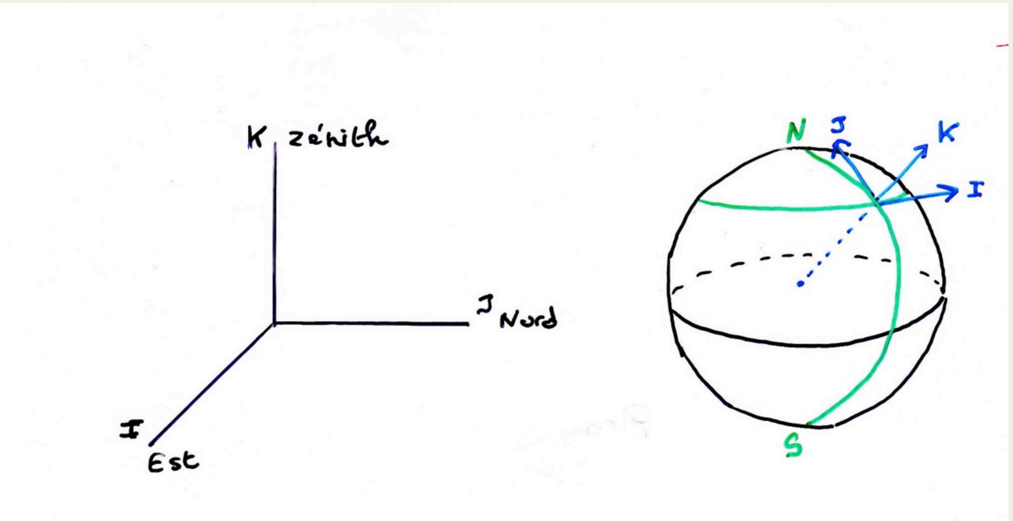
- C'est Peter Guthrie Tait qui contribuera à faire connaître les quaternions et les comprendre.

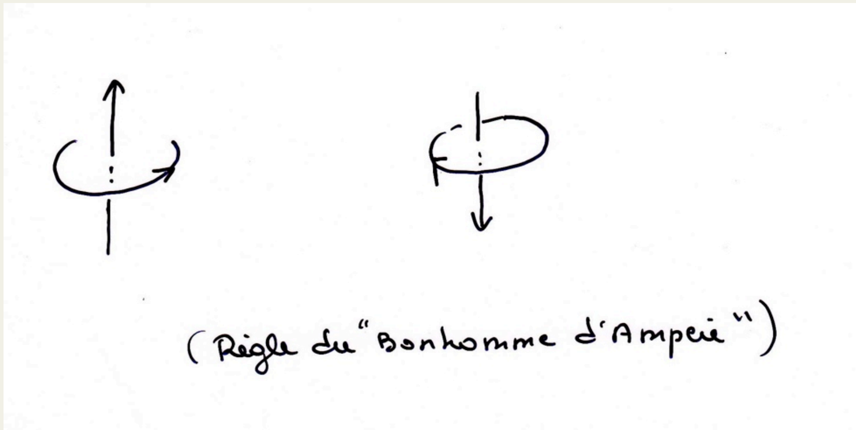


- Orienter l'espace :

« Pour déterminer la nature des rotations, j'ai regardé comme positif le sens dans lequel la terre tourne autour de son axe ou, si l'on veut, le sens dans lequel la terre tourne autour du soleil, pour un observateur qui est placé dans l'hémisphère septentrional. Le sens de cette rotation est alors l'opposé du mouvement suivant lequel tournent les aiguilles d'une montre.

C'est ce dernier mode qui a été adopté dans les deux grands ouvrages de W. Hamilton. »





-

- Dans un quaternion $w + xi + yj + zk$, w est le scalaire
- et $xi + yj + zk$ est le vecteur.
- Si l'on s'occupe alors simplement de la partie vectorielle :

- $(xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k)$
- $= xx'i^2 + xy'ij + xz'ik + yx'ji + yy'j^2 + yz'jk + zx'ki + zy'kj + zz'k^2$
- $= - xx' - yy' - zz' + (xy'-yx')k + (zx' - z'x)j + (yz' - y'z)i$

- Le produit de deux vecteurs donne dont un quaternion dont
- la partie scalaire est l'opposé de notre « produit scalaire »,
- et la partie vectorielle notre produit vectoriel.
- Si a et b sont deux quaternions de partie scalaire nulle,
- tels que $a = xi + yj + zk$ et $b = x'i + y'j + z'k$,
- *alors* $Sab = - xx' - yy' - zz'$
- *et* $Vab = (xy'-yx')k + (zx' - z'x)j + (yz' - y'z)i$

- *I, j, k* sont « imaginaires », comme le *i* d'un nombre complexe. Attention ce ne sont pas des « vecteurs ».

Traité élémentaire des quaternions de P. G. Tait, traduit en français par Gustave Plarr, 1882

« Dans ce but, Hamilton s'est servi d'une figure pour présenter à l'esprit l'ensemble des valeurs numériques, et il a ainsi conçu l'idée d'une échelle (*scalae*), qui s'étendrait en ligne droite depuis les régions de l'infini négatif jusqu'à celles de l'infini positif ; les valeurs numériques seraient en quelque sorte inscrites sur les degrés de l'échelle.
De plus un mobile, qui cheminerait le long de l'échelle et qui servirait d'index, désignerait, à proprement parler, *le nombre scalaire*, en un mot le *scalar* : chaque position que l'index occuperait sur l'échelle fournirait une *valeur* du scalar.
Par abréviation, nous pourrions aussi adopter le substantif le scalaire, mais nous risquerions ainsi de créer une expression qui serait en dehors du génie de la langue. Nous avons préféré à cet inconvénient l'introduction du terme étranger ; le *scalar*. Nous ferons usage dans notre traduction de ce terme. »

« Ce résultat montre qu'un quaternion peut toujours se décomposer en une somme de deux parties, l'une d'elles étant un nombre (affecté d'un signe + ou -), l'autre partie étant un vecteur. Hamilton désigne les deux parties du quaternion respectivement par les noms de scalar et de vecteur. »

Entre temps …

- La théorie des équipollences de Giusto Bellavitis (1834)

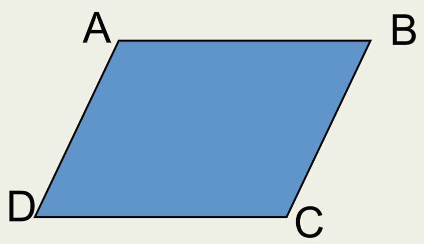
- Giusto Bellavitis (1803-1880)

- Charles Ange Laisant (1841-1920)

- Influence de Lazare Carnot

- 1° Pour exprimer que *AB* et *BA* n'ont pas le même sens, il écrit : *AB* = - *BA*

- 2° Il définit l'équipollence :
- « *Pour qu'une droite puisse être substituée à une autre, il ne suffit pas qu'elle soit égale (c'est-à-dire d'égale grandeur), il faut en outre que ces deux droites soient parallèles et dirigées dans le même sens. Deux droites qui ont de telles relations sont dites équipollentes*. »
- Il écrit *AB* Ω *DC*



- Il introduit la notation *gr.AB* pour désigner la longueur de la « droite » *AB* et *inc.OM* pour indiquer l'inclinaison de la « droite » *OM* par rapport à une droite origine.

- Il énonce aussi : quels que soient les trois points *A, B* et *C*, on a : $AB + BC = AC$

- Et $AC - AB = BC$

- Enfin il définit une multiplication dans le plan, qui revient à la multiplication des nombres complexes :
- gr. (ABxCE) = gr.AB x gr.CE
- Et : inc.(AB x CE) = inc.AB + inc. CE

- Il invente un symbole pour un accroissement de l’inclinaison d’un angle droit et il y reconnaîtra le $\sqrt{-1}$ qui est alors un opérateur.

Hermann Grassmann et

l'*Ausdehnungslehre*

(Calcul de l'extension)

(1809-1877)

- Théorie des flots et marées 1839.

H. GRASSMANN
Der Ebbe und Flut
~ 1839-40 - Publié 1911

"Par "produit géométrique de deux segments (orientés)" nous signifions l'aire du parallélogramme déterminé par ces segments ; en fixant cependant le plan de ces segments. Nous disons que deux aires planes sont géométriquement égales seulement si elles sont égales en grandeur et situées dans des plans parallèles. Par produit géométrique de trois segments (orientés) nous entendons le solide (parallèlépipède) formé à partir d'eux. Comme signe de la multiplication géométrique nous choisissons $\bullet$ ou $\dot{\times}$ tandis que nous notons la multiplication algébrique ordinaire en écrivant les deux facteurs côte à côte ou en utilisant le signe x."

"En fait il n'y a guère de concepts en mécanique qui puissent être déterminés de manière simple et générale sans ces concepts géométriques. Cependant ce ne sont pas des considérations de mécanique qui m'ont conduit à ces concepts ; j'y suis plutôt arrivé sur des bases purement géométriques, de telle sorte que la fondation véritable des ces concepts (dont je ne peux discuter ici) et la mise en place - validation - de leurs développements naturels doivent être données dans un contexte purement géométrique."

"Par "Produit linéaire" de deux segments (orientés) nous entendons le produit algébrique de l'un par le projeté orthogonal de l'autre sur lui. Nous choisissons $\overset{\frown}{\cdot}$ comme signe de la multiplication linéaire, de telle sorte que par définition $a \overset{\frown}{\cdot} b = ab \cos(ab)$. Et puisque $\cos(ab) = \cos(ba)$ nous voyons que $a \overset{\frown}{\cdot} b = b \overset{\frown}{\cdot} a$

Adhémar BARRÉ,
Comte de SAINT-VENANT (1797-1886)

<u>Mémoire sur les sommes et les différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la mécanique</u> (1845)

"J'appelle somme géométrique d'un nombre quelconque de lignes a,b,c... données en grandeur, direction et sens, une ligne qui est égale et parallèle au dernier côté d'un polygone dont les autres côtés sont a,b,c... placées bout à bout chacune avec son propre sens. Si l est le dernier côté, j'écris $\bar{l} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$..."

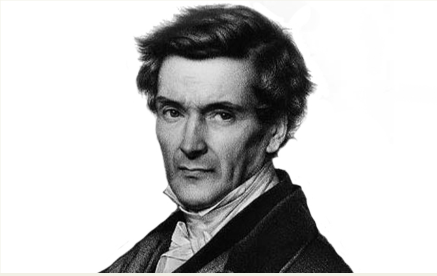
"J'appelle Produit géométrique (d'une ligne b multipliée par une ligne a, et noté $\overline{ab}$) l'aire obtenue, en grandeur et direction, en construisant un parallèlogramme sur ces deux lignes menées d'un même point. La face positive est celle sur laquelle a est à gauche et b à droite. Ainsi $\overline{aa} = 0$ et $\overline{ba} = -\overline{ab}$.

J'appelle Produit géométrique d'une aire multipliée par une ligne le volume du parallèlépipède (ou prisme oblique) qui a l'aire pour base et dont les côtés sont égaux et parallèles à la ligne donnée. Le volume est considéré comme négatif quand les côtés sont du côté négatif de la base. abc désignera le produit de l'aire $\overline{bc}$ multipliée par la ligne $\bar{a}$."

Lettre de H. Grassmann à De Saint Venant (18 avril 1845)

« Comme je lisais l'extrait de votre mémoire sur les sommes et les différences géométriques publié dans les *Comptes rendus* (tome 21, 1845), je fus frappé par la ressemblance merveilleuse, qu'il y a entre les résultats qui y sont communiqués et les découvertes faites par moi-même depuis l'année 1832 ; (…) J'ai conçu la première idée de la somme et de la différence géométriques de deux ou plusieurs lignes et du produit géométrique de deux ou trois lignes dans l'année nommée, idée en tout égard identique à celle qui est représentée dans l'extrait de votre mémoire.
(…) c'est aussi vers 1832 que m'est venue l'idée d'étendre l'emploi des signes algébriques à ces opérations géométriques que l'on est dans le cas de faire en mécanique sur des lignes ou des aires, mais je n'ai rien publié avant 1845.
Les idées de la somme et du produit géométriques des lignes ne suffisent pas pour soumettre toute la mécanique au calcul algébrique, et j'ai appliqué dans le traité cité (Theorie der Ebbe und Flut) deux autres idées non moins fécondes, ce sont l'idée du produit linéaire et celle de l'analyse des angles. »

La notion de travail - Autour de Gaspard Gustave Coriolis



G. G. Coriolis
(1792-1843)

Rôle important dans le développement de la science mécanique; « ingénieur savant »

1819 : *Notes sur la théorie des machines*. Cité par de nombreux collègues. Jamais retrouvées.

1826 : *Observations sur le choix d'une nouvelle dénomination et d'une nouvelle unité pour la dynamique.* Première définition : *le travail est le produit « du chemin parcouru et de la force dans le sens de ce chemin »*

1829 : *Du Calcul de l'effet des machines, ou considérations sur l'emploi des moteurs et sur leurs évaluation, pour servir d'introduction à l'étude spéciale des machines*

Ces diverses expressions assez vagues ne paraissent pas propres à se répandre facilement. Nous proposerons la dénomination de *travail dynamique*, ou simplement *travail*, pour la quantité $\int Pds$ définie comme on vient de le dire. Ce nom ne fera confusion avec aucune autre dénomination mécanique; il paraît très propre à donner une juste idée de la chose, tout en conservant son acception commune dans le sens de travail physique. On attache en effet au mot *travail*, dans ce sens, l'idée d'un effort exercé et d'un chemin parcouru simultanément : car on ne dirait pas qu'il y a un travail produit, lorsqu'il y a seulement une force appliquée à un point immobile, comme dans une machine en équilibre; on n'appliquerait pas non plus l'expression de travail à un déplacement opéré sans aucune résistance vaincue. Ce nom est donc très propre à désigner la réunion de ces deux élémens, chemin et force (*). Nous verrons d'ailleurs, à mesure que nous avancerons, que les propriétés des quantités telles que $\int Pds$ donnent encore plus de motifs de les désigner par le nom de travail.

que ce sera toujours entre le premier et le dernier instant que s'appliquera seulement l'équation des forces vives. Convenons aussi de désigner par *travail moteur* celui qui est dû aux forces mouvantes, et par *travail résistant* celui qui est dû aux forces résistantes.

L' influence de Peano

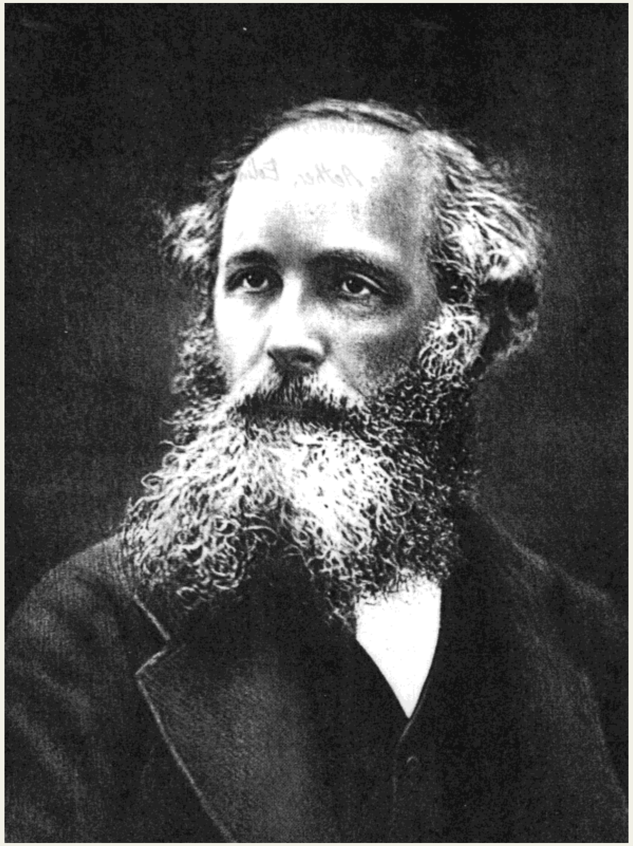
- Giuseppe Peano (1858-1932)

- *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehere 1888.*

- Il reprend l'équipollence de Bellavitis avec comme signe « $\equiv$ » plus pratique.
- Il définit le « produit scalaire » de deux segments :
- a$\times$b = ab cos(angle ab)
- Il définit l'aire algébrique d'une figure et pose :
- ABC $\equiv$ - ACB pour exprimer que les triangles n'ont pas le même sens mais que les aires sont les mêmes.
- Alors il définit une nouvelle opération sur les segments :
- On désigne par a.b l'aire du parallélogramme OACB dans lequel OA $\equiv$ a et OB $\equiv$ b, dont le périmètre est parcouru dans le sens OA $\equiv$ a.
- Alors a.b $\equiv$ - b.a

- Enfin dans le chapitre « transformation des systèmes linéaires », il énonce des axiomes qui définissent presque ce que nous nommons la structure d'espace vectoriel…. Qui peuvent être de dimension 1, 2, 3 ou …n.

- La contribution de Maxwell



James Clark Maxwell (1831-1879)

- Montre l’importance et l’utilité des vecteurs de Hamilton pour la physique (Quaternions, vecteurs, scalaires contre coordonnées cartésiennes).

Maxwell (1873)
Treatrise on Electricity and Magnetism

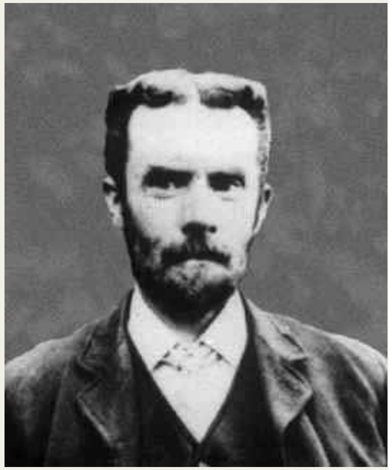
« Mais en de nombreuses occasions du raisonnement physique, considéré comme distinct du calcul, il est souhaitable d’éviter l’introduction explicite des coordonnées cartésiennes, et de fixer immédiatement l’attention sur un point de l’espace plutôt que sur ses trois coordonnées, et sur la grandeur et la direction d’une force au lieu de ses trois composantes. Cette façon de voir les quantités géométriques et physiques est plus primitive et plus naturelle que l’autre, bien que les idées qui s’y rattachent ne reçurent leur plein développement que lorsque Hamilton, par l’invention de son calcul des quaternions, fit avancer d’un grand pas le traitement de l’espace.
Comme les méthodes de Descartes sont encore les plus familières aux étudiants scientifiques, et puisqu’elles sont réellement les plus utiles en matière de calcul, nous exprimerons tous nos résultats dans la forme cartésienne. Je suis convaincu cependant, que l’introduction de ces idées, telles qu’on les distingue à partir des opérations et des méthodes des quaternions, nous sera d’un grand secours dans l’étude de toutes les parties de notre sujet, et plus spécialement en électro-dynamique, où nous devons traiter de nombreuses quantités physiques, dont les relations mutuelles trouvent une expression beaucoup plus simple par quelques expressions de type Hamilton que par les équations ordinaires.
L’un des aspects les plus importants de la méthode de Hamilton est la division des quantités entre scalaires et vecteurs ».

- « Tels furent les commencements de l’étude de la représentation géométrique des imaginaires qui dans les temps modernes nous a conduits à de si grands corps de doctrines, comme la théorie des fonctions d’un côté, celle des quaternions de l’autre avec l’Ausdehnungslehere qui occupe une position entre les deux. Qui pourrait dire les progrès que lui fera faire le prochain siècle ? »

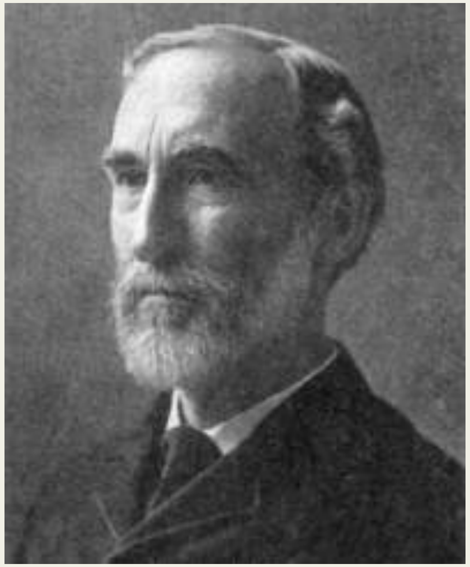
    - W. Beman, l’Enseignement mathématique, 1899.

Et …

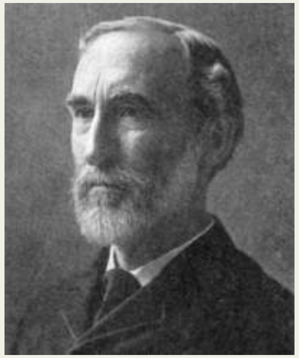
Oliver Heaviside (1850-1925)



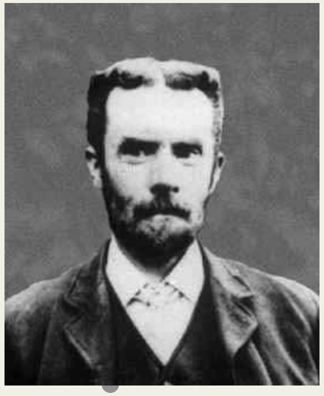
Willard Gibbs (1839-1903)



Cesare Burali Forti (1861-1931)



W. Gibbs : premier docteur ingénieur des USA en 1863 Enseigne à Yale le latin et la philosophie naturelle.
Première publication en 1873 : sur la thermodynamique.
Passe 3 ans en Europe. Très influencé par Maxwell ; étudie l'analyse vectorielle. Utilise essentiellement les idées de Grassmann plus applicables à la physique que celles de Hamilton.(Avant que le travail de Grassmann ne soit connu, les quaternions étaient le seul moyen de travailler avec les vecteurs de l'espace).
On lui doit, avec Heaviside, les notations vectorielles modernes de l'analyse vectorielle (par exemple le point pour le produit scalaire, qui deviendra le « dot product »).



Gibbs écrit entre 1881 et 1884 *Elements of vector analysis,* qui circulera pendant 20 ans sans être publié.
Un de ses élèves, le publiera en 1901.il sera repris et modernisé en 1921 par C. E. Weatherburn, à Melbourne.

Addition and Subtraction of Vectors.

4. The manner in which the vector quantities of mechanics and physics are compounded is expressed by the **triangle law of addition**, which may be stated as follows :

If three points O, P, R are chosen so that $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ *and* $\overrightarrow{PR} = \mathbf{b}$, *then the vector* $\overrightarrow{OR}$ *is called the* (*vector*) *sum or resultant of* **a** *and* **b**.

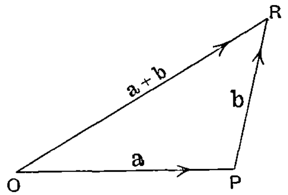


FIG. 2.

Denoting this resultant by **c**, we write

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

borrowing the sign + from algebra, and using the term vector *addition* for the process by which the resultant **c** is obtained from the *components* **a** and **b**. The above definition is not an arbitrary mathematical assumption. It is an expression of the way in which the vector quantities of physics and mechanics are compounded. We see also that the sum of two vectors $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ and $\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ}$ is the vector $\overrightarrow{OR}$ determined by the diagonal of the parallelogram of which OP and OQ are sides. For $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{b}$, so that

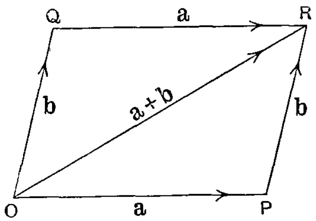


FIG. 3.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR}.$$

Thus the triangle law of addition is identical with the parallelogram law involved in the so-called "parallelogram of forces."

Further, since $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ it follows that

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR},$$

showing that $\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r}$ (say).

Application to Mechanics.

39. Work done by a force. A force acting on a particle does work when the particle is displaced in a direction which is not perpendicular to the force. The work done is a scalar quantity jointly proportional to the force and the resolved part of the displacement in the direction of the force. We choose the unit quantity of work as that done when a particle, acted on by unit force, is displaced unit distance in the direction of the force. Hence, if **F**, **d** are vectors representing the force and the displacement respectively, inclined at an angle θ, the measure of the work done is

$$Fd \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}.$$

The work done is zero only when **d** is perpendicular to **F**.

Suppose next that the particle is acted on by several forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Then during a displacement **d** of the particle the separate forces do quantities of work $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{d}, \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{d}, \ldots, \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{d}$. The total work done is

$$\sum_1^n \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{R},$$

and is therefore the same as if the system of forces were replaced by its resultant **R**.

Note. *A force represented by the vector* **F** *may be conveniently referred to as a force* **F**. *No misunderstanding is possible, for our Clarendon symbols always denote length-vectors. Similarly we may speak of a displacement* **d**, *or a velocity* **v**, *as we have already done of a point* **r**.

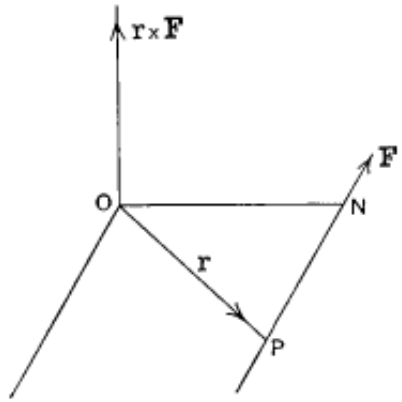


FIG. 38.

40. Vector moment or torque of a force. The vector moment (or briefly the moment) of a force **F** about a point O is a vector quantity related to an axis through O perpendicular to the plane containing O and the line of action of the force. Its magnitude is jointly proportional to the force and the perpendicular distance ON upon its line of action. The moment or *torque*

Cesare Burali Forti est un élève de Peano. Avec Roberto Marcolongo, ils écrivent en 1909 leurs *Eléments de calcul vectoriel* qui seront traduits en français en 1910. Cet ouvrage contribuera fortement à faire connaître les idées vectorielles en France.

A la suite des travaux de Hamilton et Grassmann, et après une rivalité entre « quaternionistes » et « partisans des vecteurs », un certain nombre de « physico mathématiciens » (Maxwell, Gibbs, Heaviside ..) mettent au point, à partir de 1880, les outils principaux de ce qu'on appelle le « calcul vectoriel dans l' espace à trois dimensions » : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, opérateur différentiel, …

En mathématiques, jusqu'en 1930, avec la naissance de l'algèbre linéaire, c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédomine.

Quelques notations et dénominations pour le produit scalaire

TABLE OF NOTATIONS *

	Vector.	Scalar product.	Vector product.	Dyad.	Gradient.	Divergence.	Curl.
Gibbs, Wilson	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$	∇	$\nabla\cdot = \mathrm{div}$	$\mathrm{curl} = \nabla\times$
Heaviside -	$\mathbf{a}$	$\mathbf{ab}$	$V\mathbf{ab}$	$\mathbf{a}.\mathbf{b}$	∇	div	curl
Abraham	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$		∇	div	curl
Ignatowsky	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$	$\mathfrak{A};\mathfrak{B}$	∇	div	rot
Lorentz	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{A}.\mathbf{B})$	$[\mathbf{A}.\mathbf{B}]$		grad	div	rot
Burali Forti and Marcolongo	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$		grad	div	rot

Burali Forti et Marco longo: produit intérieur ; Gibb’s : direct product ;
Grassmann : produit lineal ; Hamilton : scalar
Clifford : scalar product

Le travail d'une force dans un cours de physique

4. Définition du dictionnaire.

Le **travail d'une** force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace (l'objet subissant la force se déplace ou se déforme). Le travail est exprimé en joules (**J**), et est souvent noté *W*, initiale du mot anglais *Work* qui signifie *travail*.

II. Travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne.

1. Définition.

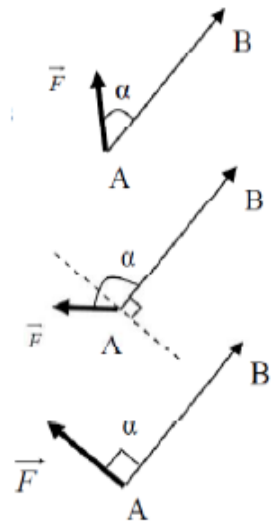
Une force est dite constante lorsque sa **valeur, son sens et sa direction ne varient pas** au cours du temps.

Le travail d'une force constante *F* pour un déplacement rectiligne *AB* de son point d'application est le produit scalaire de *F* par *AB*. Il est noté :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F*AB*\cos\alpha}$$

- $W_{AB}(\vec{F})$: travail exprimé en Joules (J).
- F : valeur de la force en Newton (N).
- AB : longueur du déplacement (m)
- α : angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ (° ou rad)

2. Le travail, une grandeur algébrique.



Selon la valeur de l'angle α, le travail peut être **positif, négatif ou nul**, c'est pour quoi on dit que c'est une grandeur algébrique.

a. Si $\alpha<90°$ alors $\cos \alpha >0$ et $W>0$ (travail positif).

On remarque que la force va favoriser le mouvement dans le sens du déplacement AB . On dit que le **travail est moteur**.

b. Si $\alpha>90°$ alors $\cos \alpha <0$ et $W<0$ (travail négatif).

La force va alors s'opposer au mouvement du solide, on dit qu'elle effectue un **travail résistant**.

c. Si α**=90°** alors $\cos \alpha =0$ et $W=0$ (**travail nul**).

Le travail d'une force est nul si le point d'application ne se déplace pas ou si sa direction est perpendiculaire à celle du déplacement.

2. Expression du travail du poids.

On pourra considérer que dans une zone étendue à quelques kilomètres au dessus de la surface de la terre, le poids est une force constante.

Le travail du poids par définition est : $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}\,.\,\overrightarrow{AB} = P.AB.\cos(P;AB)$

Avec $(P;AB) = \alpha - \Pi/2$ on a $\cos(\alpha - \Pi/2) = \sin\alpha$

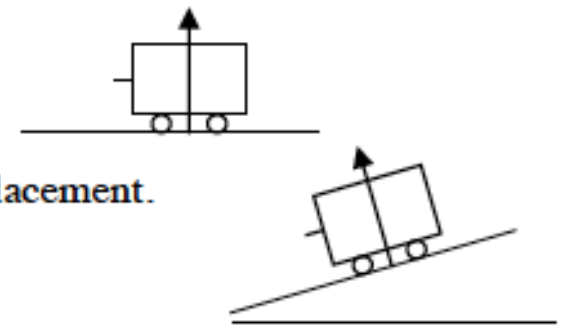
Donc $W_{AB}(\vec{P}) = P.AB.\sin\alpha = P.AB\ .\ h$

Le travail est moteur ($W > 0$) si la force poids se déplace vers le bas : donc $h > 0$

Le travail est résistif ($W < 0$) si la force poids se déplace vers le haut : donc $h < 0$

3. La réaction du sol.

Le travail de la force réaction du sol est $W_{AB}(\vec{R}) = \vec{R}\ .\ \overrightarrow{AB} = 0$



La force de réaction du sol est toujours perpendiculaire au déplacement.

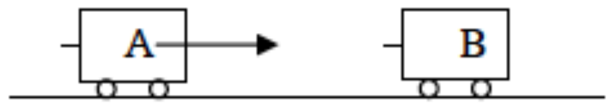
Donc le travail de la force réaction du sol est toujours nul.

4. Les frottements.

Mouvement →

$W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f}\ .\ \overrightarrow{AB} = -\,f\ .\ AB$

Le travail est résistif



Mouvement →

$W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f}\ .\ \overrightarrow{AB} = -\,f.\ AB$

Le travail est résistif

Retour à la classe et aux interrogations

Donner du sens à l'aide la notion de travail d'une force ?

en particulier cela permet de mettre l'accent sur la notion de résultat « numérique », (c'est une énergie) et non vectoriel.

Cela permet de donner une perspective historique.

Travail interdisciplinaire possible

Obstacles ?